

Джонатан Боуэн

Краткая история алгебры и вычислений (взгляд выпускника Оксфорда)

Jonathan P. Bowen (1994) "A Brief History of Algebra and Computing: An Eclectic Oxonian View" // Oxford University Computing Laboratory.

Р. Богатырев, А. Китаев, перевод с англ.

60-летию профессора Хоара посвящается /11 января 1994 г./

"О Гомере эта славная женщина знала не больше,
чем об алгебре, но она была вполне довольна делами Пэна...
и совершенно уверена, что ее милый мальчик получит место,
которое он заслуживает."

Вильям Мейкпис Теккерей (1811-1863),
"Пенденнис" (1848-1850)

Настоящая работа посвящена 60-летию известного профессора Хоара (C.A.R.Noare), получившего в 1980 году престижную премию Алана Тьюринга. Хоар известен своими работами в области алгебры программ, а потому Джонатан Боуэн посвятил эту работу истории алгебры — от ее истоков до нынешнего применения в программировании.

Работа несмотря на свою лаконичность изобилует множеством интересных фактов, в ней затрагивается история становления математики в Англии и прежде всего в двух ее всемирно известных центрах — Кембриджском и Оксфордском университетах.

1. ИСТОКИ АЛГЕБРЫ

В Британском музее в Лондоне хранится Риндский папирус (Rhind Papyrus), составленный около 1650 г. до нашей эры. В тексте содержится такая задача: "Раздели 100 хлебов на десятерых, а в их числе — лодочник, десятник и привратник, коим причитается вдвое. Сколько же получит каждый?". Разумеется, эту задачу можно решить только алгебраически.

Первый трактат по алгебре написал Диофант (Diophantus) из Александрии в третьем веке нашей эры. Термин восходит к арабскому слову al-jabr, что означает буквально "воссоединение разъединенных частей". Это слово имеет не только математический смысл, но означает также хирургическое лечение переломов. Оно получило широкое распространение после появления книги, озаглавленной "al-jabr wa'l-mukabala" — "Наука восстановления недостающего и уравнения подобного с подобным". Написал ее математик Абу Джаафар Мухаммад (Abu Ja'far Muhammad, работал примерно с 800 по 847 гг.), получивший позднее известность под именем аль-Хорезми, человек из Хорезма (ныне Хива в Узбекистане). Он ввел математическую запись вычислений вместо использования абака. Слова algorism (арабская, или десятичная запись чисел) и algorithm (алгоритм) обязаны своим происхождением имени этого математика. С алгеброй, зародившейся в древнем Вавилоне, Египте и Индии, арабы познакомили итальянцев, и позднее она стала достоянием жителей других стран Европы.

2. НАЧАЛО РАЗВИТИЯ АЛГЕБРЫ В АНГЛИИ

Ведущими математиками Англии в первой половине XVI века были Катберт Тонстолл (Cuthbert Tonstall, 1474-1559) и Роберт Рекорд (Robert Recorde, 1510?-1559) [1]. Это первые математики Кембриджа, жизнеописания которых зафиксированы сколько-нибудь подробно, так что их можно считать основателями одного из важнейших мировых математических центров. И тот, и другой переехали в Оксфорд, где работали в местном университете. Роберт Рекорд, которого, возможно, следует считать более значительным ученым из этой пары, в 1531 г. стал членом совета Оксфордского колледжа Всех Душ (All Souls College).

Не исключено, что слово "алгебра" впервые появилось в 1551 году в работе Рекорда "Путь знания" (Pathway of Knowledge), в которой он писал: "... а также правило ложного положения, с различными примерами, не только простыми, но и отчасти относящимися к правилу Алгебры". В 1557 г. в своей работе "Whetstone of Witte" он впервые употребил для обозначения равенства знак =, "поелику несть предметов более равных" (чем два параллельных отрезка одинаковой длины). Символы + и -:- были впервые использованы в печати в "Арифметике" Джона Уидмана (John Widmann, Лейпциг, 1489 г.), но они стали общеупотребительными в Англии лишь после появления книги Рекорда "Whetstone", где описывались так: "А еще есть два знака, используемых часто, и первый из них пишется так +- и означает "более", а второй пишется так —, и означает "менее". Возможно, эти символы пришли в математику из немецких складов, где было принято с помощью подобных знаков пометать мелком ящики с товаром, вес которых отклонялся от некоторого стандарта. Они появились в книге Стайфела (Stifel), вышедшей в свет в 1544 г. Томас Хэриот (Thomas Hariot, 1560-1621), уроженец Оксфорда, который работал в St. Mary Hall, позднее вошедшем в состав Ориэльского колледжа (Oriel College), изобрел знаки неравенства < и > [2]. Он продолжил работу Рекорда и способствовал обретению алгеброй ее современной формы. Труд Хэриота по алгебре, в котором описывается трактующий о корнях "закон знаков Хэриота", был опубликован через десять лет после смерти автора, хотя он был написан, вероятно, около 1610 года.

Вильям Оутред (William Oughtred, 1574-1660), который давал частные уроки оксфордским студентам и решал проблемы математики, не покидая своего дома в деревне, где он был священником, в своей работе Clavis Mathematica (1631) расширил сферу применения знака умножения x, который Рекорд в трактате "Основания искусств" (Grounde of Artes, 1542) использовал совсем иначе. Он же ввел тригонометрические термины "синус", "косинус" и "тангенс". Знак деления :-, который Ран (J.H.Rahn) применил в 1659 г., был введен в Англии Джоном Пеллом (John Pell) в 1688 г.

3. АЛГЕБРА И АНАЛИТИЧЕСКИЕ МАШИНЫ

В письме, написанном в 1827 г., Джон Гершел (John Hershel) предложил Чарлзу Бэббиджу (Charles Babbage, 1791-1871) выставить свою кандидатуру на вакантную в тот момент должность руководителя кафедры математики в Оксфордском университете. Бэббидж только что потерял отца, и на предложение ответила Джорджина Бэббидж, его жена: "Редко случается так, что я не знаю заранее, хочет чего-то Чарлз или не хочет, но относительно профессорства судить не берусь. До смерти отца он дал бы согласие, однако, не разобравшись до конца в наших делах, я не могу сказать, как повлияет это событие на его отношение к такому предложению".

В данном случае судьба профессорской вакансии была уже в сущности решена. Бэббидж так и не выставил свою кандидатуру, и кафедру возглавил Бэйдэн Пауэлл (Baden Powell). А Бэббидж стал профессором математики Кембриджского университета, получив должность, которую прежде занимал сэр Исаак Ньютон (Isaac Newton). Он сыграл важную роль в распространении в Великобритании континентальной европейской символики немецкого математика Готтфрида Вильгельма Лейбница (Gottfried Wilhelm Leibniz, 1646-1716). Ньютоновская символика, принятая дотоле почти повсеместно, мешала развитию математики и привела к тому, что в остальной части Европы эта дисциплина прогрессировала быстрее (характерный пример: применение "точечной" ньютоновской символики вместо более мощной d-символики Лейбница). Но если в то время даже в славном Кембридже математика пребывала в плачевном состоянии, то в Оксфорде дела с этой наукой обстояли еще хуже!

К 1836 г. Бэббидж уже набрасывал план книги "Алгебра, или машина формул" (Algebra or Formula Engine), обобщенной версии его более знаменитой работы "Аналитические машины" (Analytical Engines). Ада Лавлис (Ada Lovelace) отмечала в своих комментариях к статье Луиджи Федерико Менабреа (Luigi Federico Menabrea) о работе Бэббиджа: "Многие люди, не сведущие в математических занятиях, воображают, будто раз дело машины — выдавать результаты в численной символике, природа ее процессов должна быть, следовательно, не алгебраической и аналитической, а арифметической и числовой. Это неверно... Машина может давать результаты трех видов: символьные результаты...; численные результаты...; и алгебраические результаты в буквенной символике".

Потенциальные символические результаты аналитических машин Бэббиджа важны, так как имеют отношение к современным компьютерам. Ада Лавлис отмечала, что "... каждый кружок наверху [над колонной колес, записывающих десятичные числа] предназначен для того, чтобы содержать алгебраические знаки + или s , ... Подобным же образом в эти кружки можно поместить любые другие чисто символьные результаты алгебраических процессов".

10 июля 1836 г., вскоре после того, как Бэббидж решил вводить данные в систему с помощью перфокарт, он сделал (в дневнике) следующую запись: "... сегодня мне пришла в голову одна идея общего характера, правда, пока лишь неотчетливая: машина может обрабатывать алгебраические расчеты. Я имею в виду — без каких-либо ссылок на значения букв... Мне представляется, подобно тому как карточки (Jacquards) вычислительной машины проводят серию операций и затем вновь начинают с первой, таким же образом, возможно, удастся организовать дело так, чтобы с помощью одних карточек пробивать отверстия в других эквивалентно любому данному числу повторений. Но эти отверстия, возможно, смогут представлять собой маленькие фрагменты формулы, составленной до этого первыми карточками, и, возможно, удастся найти некоторый режим упорядочивания таких разрозненных частей".

13 декабря следующего, 1837 года, Бэббидж сделал в одной из записных книжек такую запись: "О машинах для алгебраической разработки функций. Недавно меня посетила вполне отчетливая мысль о создании машины для расчетов. Очевидно, что если вычислительная машина смогла бы распечатывать подстановки, которые она делает в алгебраической форме, мы должны прийти к алгебраическому расчету, к тому, что она может распечатать все подстановки, которые отмечены в композиции с помощью некоторой символики. Однако для этих целей лучше создать новую машину".

Иными словами, он размышлял о создании машины для осуществления общих алгебраических операций и вывода формул, получаемых из расчетов, которые проводятся на такой машине. Эти идеи можно считать расширением "Аналитических машин", но далее Бэббидж их не развивал.

На закате своих дней Бэббидж попросил Гарри Уилмота Бакстона (Harry Wilmot Buxton) написать его биографию. Черновой набросок такой биографии, а также некоторые бумаги, переданные ему Бэббиджем во время работы над ней, ныне стали экспонатами коллекции Бакстона и хранятся в Оксфордском музее истории науки.

4. БУЛЕВА АЛГЕБРА

В своем труде De Arte Combinatoria, написанном в 1666 году, Лейбниц предпринял попытку разработать систему символов и правил их сочетания, а также двоичную систему обозначений (binary notation). В 1854 году Джордж Буль (George Boole, 1815-1864), который с 1849 года занимал в Корке (Cork) должность профессора математики несмотря на отсутствие у него даже самой низшей ученой степени, формализовал систему таких правил в своей работе, озаглавленной, быть может, (излишне) оптимистично, "Исследование законов мышления" (An Investigation of the Laws of Thought). Буль задался целью сформулировать строгие правила рассуждений и произвел революционный переворот в формальной логике, которая в предшествующие тысячелетия развивалась очень медленно. Его правила превратили логику из дисциплины философской в математическую. Позднее они получили известность как булева алгебра, и конструкция всех современных бинарных цифровых компьютеров строится на результатах его работы. Эти логические операции, реализованные, как правило, в виде электронных вентилях (electronic gates), представляют собой все, что необходимо для совершения более сложных операций, таких как арифметические.

Труды Буля оказали немалое влияние на Чарлза Латуиджа Доджсона (Charles Lutwidge Dodgson, 1832-1898), преподававшего математику в Оксфордском колледже Христовой Церкви (Christ Church, Oxford) с 1855 по 1881 год. Он проявлял интерес к общим проблемам алгебры и к педагогике. В мае 1855 года он отмечал в своем дневнике: "Я начал разрабатывать схему систематического преподавания основ алгебраической геометрии. Похоже, что до меня никто этим не занимался... Мне представляется, что сделать это сколько-нибудь удовлетворительным образом чрезвычайно трудно".

Впоследствии он написал работы по Пятой книге Эвклида, доказанной алгебраически и "Набросок плана алгебраической геометрии", а также сборники алгебраических и арифметических формул в помощь экзаменуемым. Гораздо позже, в 1884 году, Доджсон писал в своем дневнике: "В последние несколько дней я работал над Логической Алгеброй и, кажется, пришел к более простой символике, нежели у Буля". В 1885 году он отмечает: "Я работаю в Гилфорде — учу своей логической алгебре Луизу, Маргарет и двух мальчиков". В марте 1885 года он упоминает "символическую логику, в которой применяется мой алгебраический метод".

Он опубликовал ряд книг по логике, включая изданную в 1896 году книгу "Символическая логика. Часть 1: Основы", подписанную его более знаменитым псевдонимом Льюис Кэрролл (Lewis Carroll). К сожалению, часть II так никогда и не увидела свет.

5. АЛГЕБРА И ВЫЧИСЛЕНИЯ

С тех пор, как в 1945 году завершилась Вторая мировая война, применение компьютеров во всем мире росло по экспоненте. В это время Лесли Фокс (Leslie Fox, 1918-1922) [3] перешел из вычислительной службы Адмиралтейства в Национальную физическую лабораторию (NPL) в отдел И.Гудвина (E.T.Goodwin), где работал и Алан Тьюринг (Alan Turing) [4]. Его интересовали проблемы численной линейной алгебры, и, работая в лаборатории NPL, он провел серию исследований использования метода исключения Гаусса для оценки точности решения линейных уравнений. Позднее, в 1957 году профессор Фокс стал первым директором вычислительной лаборатории Оксфордского университета, а в 1963 году получил должность профессора численного анализа, в которой он и трудился до выхода на пенсию в 1983 году. Заведующим математическим отделом NPL был Дж.Уомерсли (J.R.Womersly). В 1946 году он писал в докладе об обсуждавшемся тогда компьютере ACE: "... это не просто счетная машина в обычном смысле слова. Его не следует ограничивать выполнением арифметических функций.

Столь же успешно он может решать и алгебраические задачи." В 1951 году Кристофер Стрэчи (Christopher Strachey), работавший в то время учителем в школе Хэрроу (Harrow School), связался с Майком Вуджером (Mike Woodger) из NPL через их общего знакомого. Он начал писать набросок программы для компьютера Pilot ACE, и скоро добился столь внушительных успехов, что эту машину начали разрабатывать в Манчестерском университете. Он раздобыл копию "Учебника программиста" Алана Тьюринга и написал его автору длинное письмо с изложением своих планов: "Было бы по меньшей мере чрезвычайно удобно, если бы избранная символика при распечатке была понятной в математическом смысле... когда подходящая символика будет определена, останется только набирать на клавиатуре более или менее стандартные математические символы, и особая последовательность процедур, которую можно было бы назвать хотя бы 'программой' преобразует ее в инструкции, необходимые для того, чтобы машина выполнила указанные операции. Может быть, это звучит утопически, но я думаю, что такое, или нечто похожее, все же реально".

Эти идеи были весьма близки мыслям самого Тьюринга, и он позаботился о том, чтобы Стрэчи получил хорошую работу, позволяющую ему проявить свои навыки программиста, которые отвлекали его от преподавательской деятельности. Позднее Стрэчи основал группу программных исследований, входившую в состав вычислительной лаборатории Оксфордского университета, которую он и возглавлял вплоть до своей безвременной кончины в 70-х годах.

Программы, специально разработанные для чтения, обработки и вывода алгебраических формул так или почти так, как это предвидел Стрэчи, в наши дни стали широко доступными. И первое место на рынке, пожалуй, занимает программный пакет "Mathematica", разработанный корпорацией Wolfram Research, которую основал Стивен Вольфрам (Stephen Wolfram, получивший в Оксфорде среднее и высшее образование в 60-е и 70-е годы). Этот пакет с удовольствием применяют для ускорения математических расчетов как в целях преподавания,

так и в исследовательских целях такие ученые, как Дана Скотт (Dana Scott), работавшая ранее в Оксфорде, а ныне — в университете Карнеги-Меллон в США.

Наряду с символьным представлением алгебраических формул возможен вывод и в графическом виде. Быстродействие и мощность персональных компьютеров и рабочих станций сделали в настоящее время применение таких программ доступным для множества людей несмотря на тот факт, что данный пакет реализован в более чем 1 млн строк кода на языке Си.

6. ПОСЛЕДНИЕ ДОСТИЖЕНИЯ В ОБЛАСТИ АЛГЕБРЫ ПРОГРАММ

Вплоть до сравнительно недавнего времени правила алгебры, выводились из посылок, касающихся неизвестных количеств. При этом предполагалось, что эти символы представляют, к примеру, числовые значения. Но к началу XX века такое понимание уступило место представлению более абстрактному. Согласно этому представлению, хотя данные правила и можно в случае необходимости интерпретировать в конкретном контексте, это не является обязательным или даже уместным при любых обстоятельствах. Алгебраической обработке можно подвергать и другие математические объекты, да и сами компьютерные программы можно рассматривать как такие объекты, если задать для них подходящую математическую семантику.

Общие алгебраические законы программирования, применимые ко многим императивным языкам программирования или их подмножествам, предложены группой исследователей во главе с профессором Тони Хоаром (Tony Hoare), который возглавил группу программных исследований в Оксфорде в 1977 году [5]. Было предложено множество алгебр процессов особого назначения и наборов законов по их применению, которые позволяют рассуждать о них формально. Возможно, наиболее широкое применение из них нашли CCS Робина Милнера (Robin Milner) и CSP (Communicating Sequential Processes) Тони Хоара. Обе алгебры помогают строить рассуждения относительно параллельных (concurrent) систем, причем последняя вдохновила разработчиков на создание языка параллельного программирования Оссат. Законы этого языка, разработанные Биллом Роско (Bill Roscoe), Хоаром и другими [6], были с успехом применены для верификации процессора плавающей точки для транспьютера Inmos T800, что принесло фирме Inmos Ltd. коммерческий успех и престижную королевскую премию за технологические достижения (Queen's Award for Technological Achievement).

В более позднее время было исследовано использование алгебраических законов при верификации спецификаций компиляторов [7], которая проводилась двумя путями: или посредством прямой компиляции в объектный код для машины, определенной интерпретатором на языке высокого уровня, который используется при компиляции, или с использованием нормальной формы, состоящей из очень ограниченного подмножества данного языка высокого уровня, которое близко к окончательной реализации. Эти доказательства могут быть автоматизированы с помощью таких систем, как OBJ. Эту систему спроектировал работающий ныне в Оксфорде профессор Джозеф Гоген (Joseph Goguen), который внес значительный вклад в создание теоретического фундамента в таких областях исследования, как начальные алгебры (initial algebras) и упорядоченная алгебра (order sorted algebra). Этот инструмент облегчает алгебраическую обработку математических структур (программ, например) с помощью автоматизации некоторых из наиболее земных аспектов, включая ассоциативное и коммутативное (AC) соответствие.

Важным аспектом компьютерных наук является моделирование. И многие алгебраические свойства могут быть выведены из моделей. Приведем цитату из работы Хоара [8]: "Модель вычислительной парадигмы начинается с выбора носителей потенциальных прямых и косвенных наблюдений, которые можно провести в отношении вычислительного процесса. Конкретный процесс моделируется как подмножество наблюдений, возможных применительно к данному процессу. Формирование процесса моделируется с помощью соотнесения наблюдений над составным процессом с наблюдениями над его компонентами. Существенную роль при таком формировании играют косвенные наблюдения. Алгебраические свойства составных операций выводятся с помощью этой несложной теории подмножеств и отношений.

Жизнеспособность таких подходов пока еще не получила подтверждения в виде широкого промышленного применения. Как указывает Хоар [8]: "Создание единой математической модели, подчиняющейся элегантному набору алгебраических законов представляет собой значительное интеллектуальное достижение; то же можно сказать и о формулировании набора алгебраических законов, характеризующих интересное и полезное множество моделей. Но ни одно из этих

достижений не является самодостаточным. Нам нужно построить большое количество моделей и алгебр, охватывающих широкий набор вычислительных парадигм, которые можно реализовать в аппаратном или программном обеспечении, будь то сегодня или в каком-то неопределенном будущем. Однако перспективы использования алгебраических методов в проектировании и верификации компьютерных систем представляются многообещающими, если только эти методы станут достоянием широких кругов инженеров, подобно тому как достоянием многих стала сегодня школьная алгебра.

Литература

- [1] R.T.Gunther (1923) "Chemistry, Mathematics, Physics and Surveying" // Early Science in Oxford, Vol.I, Oxford.
- [2] R.T.Gunther (1937) "Oxford Colleges and their Men of Science" // Early Science in Oxford, Vol.XI, Oxford.
- [3] N.K.Nichols (1993) "Obituary: Professor Leslie Fox" // C.Math., FIMA, IMA Bulletin, Vol.29, p.175-176.
- [4] A.Hodges (1983) "Alan Turing: The Enigma" // Simon & Schuster.
- [5] C.A.R.Hoare et al. (1987) "Laws of programming" // Communications of the ACM, Vol.30, No.8, p.672-687.
- [6] A.W.Roscoe and C.A.R.Hoare (1988) "Laws of Occam programming" // Theoretical Computer Science, No.60, p.177-229.
- [7] C.A.R.Hoare (1991) "Refinement algebra proves correctness of compiling specifications" // In C.C. Morgan and J.C.P. Woodcock, editors, 3rd Refinement Workshop, Workshops in Computing, p.33-48, Springer-Verlag.
- [8] C.A.R.Hoare (1993) "Algebra and models" // ACM Software Engineering Notes, Vol.18, No.5, p.1-8.
- [9] J.Gattegno (1976) "Lewis Carroll: Fragments of a Looking Glass" // Thomas Y. Crowell Company, New York // Translated by R. Sheed.
- [10] R.A.Hyman (1982) "Charles Babbage: Pioneer of the Computer" // Oxford University Press.

Об авторе. Джонатан Боуэн (Jonathan P. Bowen) ранее работал ведущим исследователем в вычислительной лаборатории Оксфордского университета (Oxford University Computing Laboratory). Начиная с 1977 года, он работал в области компьютеринга как в академических учреждениях, так и в промышленности. Область его профессиональных интересов включает формальные методы, Z-символику, вероятностно-корректные системы, быстрое макетирование с использованием логического программирования, декомпиляцию, аппаратную компиляцию, системы с повышенной безопасностью, совместное проектирование аппаратного и программного обеспечения, интерактивные музеи. Дж.Боуэн закончил Оксфордский университет, где получил степень магистра в области инженерных наук (Engineering Science). В 1994 году Боуэн получил премию Чарльза Бэббиджа (IEE Charles Babbage Premium Award), в настоящее время председатель рабочей группы ESPRIT ProCoS-WG Working Group, состоящей из 24 европейских партнеров. Он председатель группы пользователей Z-символики (Z User Group), а также член компьютерного сообщества IEEE Computer Society, ACM и EUROMICRO.