№ 1

1-57.1

ДОКЛАДЫ

АКАДЕМИИ НАУК СССР

НОВАЯ СЕРИЯ

1955

Том 100, № 2

57. 2

Доклады Академии наук СССР
1955. Том 100, № 2

МАТЕМАТИКА

А. П. ЕРШОВ

ОБ ОДНОМ МЕТОДЕ ОБРАЩЕНИЯ МАТРИЦ

(Представлено академиком С. Л. Соболевым 12 XI 1954)

Основу предлагаемого метода составляет следующая лемма:

Лемма. *Пусть $A\{a_{ij}\}$ — неособенная матрица порядка n и пусть строятся по индукции три последовательности матриц $A^{(m)}\{a_{ij}^{(m)}\}$, $X^{(m)}\{x_{ij}^{(m)}\}$ и $B^{(m+1)}\{b_{ij}^{(m+1)}\}$ $(m = 1, \ldots, n)$ таких, что $A^{(0)} = E$, $X^{(0)} = E$, $B^{(1)} = A - E$, где $E\{\delta_{ij}\}$ — единичная матрица, и*

$$a_{ij}^{(m)} = \begin{cases} a_{ij}, & i \leqslant m; \\ \delta_{ij}, & i > m; \end{cases} \tag{I}$$

$$x_{ij}^{(m)} = x_{ij}^{(m-1)} - \frac{x_{im}^{(m-1)} b_{mj}^{(m)}}{1 + b_{mm}^{(m)}} \quad (i, j = 1, \ldots, n); \tag{II}$$

$$b_{ij}^{(m+1)} = b_{ij}^{(m)} - \frac{b_{im}^{(m)} b_{mj}^{(m)}}{1 + b_{mm}^{(m)}}. \tag{III}$$

Тогда

$$X^{(m)} = (A^{(m)})^{-1} \tag{IV}$$

и, в частности,

$$X^{(n)} = (A^{(n)})^{-1} = A^{-1}.$$

Доказательство. 1°. Пусть $A\{a_{ij}\}$ и $X\{x_{ij}\}$ — известные взаимно-обратные матрицы, т. е.

$$AX = E, \tag{1}$$

и пусть A^* — матрица с элементами

$$a_{ij}^* = \begin{cases} a_{ij}, & i \neq k; \\ a_{kj} + \Delta a_{kj}, & i = k, \end{cases}$$

где Δa_{kj} $(j = 1, \ldots, n)$ — произвольные числа, образующие вектор ΔA_k. Тогда, если A^* окажется неособенной матрицей, для матрицы $X^*\{x_{ij}^*\}$, обратной к A^*, из уравнения (1) и уравнения

$$A^*X^* = A^*(X + \Delta X) = E \tag{2}$$

можно получить простыми выкладками, что

$$x_{ij}^* = x_{ij} + \Delta x_{ij} = x_{ij} - \frac{x_{ik}(\Delta A_k X_j)}{1 + (\Delta A_k X_k)} \quad (i, j = 1, \ldots, n), \tag{3}$$

где X_j — j-й столбец матрицы X.

57. 3

2°. Выражение (I) можно представить в виде следующего рекуррентного соотношения:

$$a_{ij}^{(m)} = \begin{cases} a_{ij}^{(m-1)}, & i \neq m; \\ a_{mj}^{(m-1)} + (a_{mj} - \delta_{mj}), & i = m. \end{cases} \tag{4}$$

Тогда, считая, что числа $a_{mj} - \delta_{mj}$ $(j = 1, \dots, n)$ образуют вектор $\tilde{A}_m = A_m - E_m$, где A_m и E_m — m-е строки матриц A и E, соответственно, и обозначив через $X^{(m)}\{x_{ij}^{(m)}\}$ матрицу, обратную к $A^{(m)}$, получим из (3), что

$$x_{ij}^{(m)} = x_{ij}^{(m-1)} - \frac{x_{im}^{(m-1)}\,(\tilde{A}_m X_j^{(m-1)})}{1 + (\tilde{A}_m X_m^{(m-1)})} \quad (i, j = 1, \dots, n; \quad m = 1, \dots, n). \tag{5}$$

3°. Сравнивая (5) и (II), видим, что для доказательства леммы достаточно показать, что

$$(\tilde{A}_i X_j^{(m-1)}) = b_{ij}^{(m)} \quad (i, j = 1, \dots, n; \quad m = 1, \dots, n). \tag{6}$$

Для $m = 0$

$$(\tilde{A}_i X_j^{(0)}) = \sum_{k=1}^{n} (a_{ik} - \delta_{ik})\,\delta_{kj} = a_{ij} - \delta_{ij} = b_{ij}^{(1)}.$$

Пусть для $m - 1$ $(\tilde{A}_i X_j^{(m-1)}) = b_{ij}^{(m)}$. Тогда для m

$$(\tilde{A}_i X_j^{(m)}) = \left(\tilde{A}_i\left[X_j^{(m-1)} - \frac{X_m^{(m-1)}\,(\tilde{A}_m X_j^{(m-1)})}{1 + (\tilde{A}_m X_m^{(m-1)})}\right]\right) =$$

$$= (\tilde{A}_i X_j^{(m-1)}) - \frac{(\tilde{A}_i X_m^{(m-1)})\,(\tilde{A}_m X_j^{(m-1)})}{1 + (\tilde{A}_m X_m^{(m-1)})} = b_{ij}^{(m)} - \frac{b_{im}^{(m)}\,b_{mj}^{(m)}}{1 + b_{mm}^{(m)}} = b_{ij}^{(m+1)}.$$

Лемма доказана.

Легко видеть, далее, что матрица $X^{(m)}$ имеет следующее строение:

$$x_{ij}^{(m)} = \begin{cases} x_{ij}^{(m)}, & i \leqslant m; \\ \delta_{ij}, & i > m. \end{cases}$$

В то же время из (II) и (III) следует, что после того как построены матрицы $X^{(m)}$ и $B^{(m+1)}$, для построения матриц $X^{(m+1)}, X^{(m+2)}, \dots, X^{(n)}$ потребуется только $n - m$ последних строк матрицы $B^{(m+1)}$. Поэтому предлагаемой вычислительной схеме обращения матрицы можно придать следующий вид.

Пусть A — неособенная матрица и пусть по индукции строится последовательность матриц $S^{(0)}, S^{(1)'}, S^{(1)}, \dots, S^{(n)'}, S^{(n)}$, такая, что $S^{(0)} = A - E$,

$$s_{ij}^{(m)'} = \begin{cases} s_{ij}^{(m-1)}, & i \neq m; \\ \delta_{mj}, & i = m; \end{cases} \quad (i, j = 1, \dots, n; \quad m = 1, \dots, n) \tag{7}$$

$$s_{ij}^{(m)} = s_{ij}^{(m)'} - \frac{s_{im}^{(m)'}\,s_{mj}^{(m-1)}}{1 + s_{mm}^{(m-1)}}. \tag{8}$$

Тогда $S^{(n)} = X^{(n)} = A^{-1}$.

57. 4

Действительно, из (7) и (8) вытекает, что $S^{(m)}$ имеет своими первыми m строками первые m строк матрицы $X^{(m)}$, а последними $n-m$ строками — последние $n-m$ строк матрицы $B^{(m+1)}$, откуда и следует, что

$$S^{(n)} = X^{(n)} = A^{-1}.$$

Хотя предлагаемый метод основан на другой идее, нежели методы обращения матриц, опирающиеся на известный алгоритм последовательного исключения неизвестных, он с ними тесно связан в вычислительном отношении. В частности, между элементами матриц $S^{(m)}$ и $C^{[m]}$ (матрицы, получающейся после m-го этапа обращения матрицы методом перекрестного умножения ([1])) имеют место следующие соотношения:

$$s_{ij}^{(m)} = \begin{cases} c^{[m]}_{i-m-n,\, j-m+n}, & i \leqslant m, \quad j \leqslant m; \\ -c^{[m]}_{i-m+n,\, j-m}, & i \leqslant m, \quad j > m; \\ -c^{[m]}_{i-m,\, j-m+n}, & i > m, \quad j \leqslant m; \\ c^{[m]}_{i-m,\, j-m} - \delta_{ij}, & i > m, \quad j > m. \end{cases} \tag{9}$$

Эти соотношения получаются из сопоставления формулы (6) в работе ([1]) с формулами, выражающими элементы матрицы $S^{(m)}$ через миноры исходной матрицы A:

$$s_{ij}^{(m)} \cdot \Delta_m = \begin{cases} (-1)^{i+j} M_A\begin{pmatrix} 1, \ldots, j-1, j+1, \ldots, m \\ 1, \ldots, i-1, i+1, \ldots, m \end{pmatrix}, & i \leqslant m, \quad j \leqslant m; \\ (-1)^{i+m+1} M_A\begin{pmatrix} 1, 2, \ldots\ldots\ldots\ldots, m \\ 1, \ldots, i-1, i+1, \ldots, m, j \end{pmatrix}, & i \leqslant m, \quad j > m; \\ (-1)^{j+m} M_A\begin{pmatrix} 1, \ldots, j-1, j+1, \ldots, m, i \\ 1, 2, \ldots\ldots\ldots\ldots, m \end{pmatrix}, & i > m, \quad j \leqslant m; \\ M_A\begin{pmatrix} 1, \ldots, m, i \\ 1, \ldots, m, j \end{pmatrix}, & i > m, \quad j > m, \end{cases} \tag{10}$$

где Δ_m — главный минор m-го порядка матрицы A. Эти выражения можно получить из (IV) и (6), исходя из известного представления элементов обратной матрицы через алгебраические дополнения элементов прямой матрицы.

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова

Поступило
11 XI 1954

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] П. Д. Гроссман, Усп. матем. наук, 5, в. 3, 87 (1950).